

Análisis Simbólico del Sistema PWL Lorenz

J. G. Barajas-Ramírez*, F. J. Cárdenas-Flores*

*Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica A. C. (IPICYT), División de Matemáticas Aplicadas, Camino a la Presa San José 2055 Col. Lomas 4a Sección CP. 78216 San Luis Potosí, S. L. P., México.

Resumen—Presentamos un estudio de la dinámica simbólica del sistema caótico de Lorenz lineal por partes (PWL) basada en su representación como autómata híbrido (AH). Un AH es un modelo computacional que permite la definición de localidades discretas, cada una con su propia descripción dinámica. Como tal, resulta un modelo con potenciales ventajas para la representación de sistemas continuos por partes. La evolución dinámica del sistema PWL Lorenz se representa “burdamente” como la secuencia de símbolos que indican las localidades del AH que la trayectoria del sistema visita mientras su dinámica evoluciona. Al analizar las secuencias de símbolos correspondientes a diferentes tipos de trayectorias observamos patrones de evolución característicos que permiten establecer bases para reconocer la dinámica caótica del sistema PWL Lorenz en términos del lenguaje formal generado por el atractor correspondiente a cada comportamiento.

Palabras clave: Sistemas caóticos, Autómata híbrido, Dinámica simbólica.

I. INTRODUCCIÓN

Las observaciones y mediciones hechas a fenómenos naturales siempre tienen una precisión limitada. Dicha limitación está sujeta a la tecnología de los instrumentos empleados. Por ejemplo, un convertidor A/D de 12 bits tendrá un rango de 4096 diferentes símbolos para expresar una medición en su rango de voltaje. Además, la medición que se reporta en un instante dado depende de la frecuencia de muestreo para la cual está diseñado el convertidor A/D. El valor desplegado en un instante dado no es el valor instantáneo, sino que será el valor tomado para representar un intervalo de tiempo. De modo que, las 4096 diferentes mediciones posibles para describir el voltaje, son los únicos valores que podemos distinguir relacionados con el valor real de esa cantidad física. Una forma de modelar la dinámica del voltaje es establecer el orden de los símbolos que forman la *palabra* que representa la evolución de las mediciones de voltaje del sistema. Así, el sistema dinámico productor del voltaje, se puede representar en un espacio discreto de secuencias infinitas de símbolos, de modo que la dinámica del sistema esta dada por el operador desplazamiento a través de la cadena de símbolos. Esta representación discreta de un sistema dinámico continuo es llamada *dinámica simbólica* (B.-L. Hao, 1989)

Los símbolos, también llamados “*estados*”, utilizados en la representación discreta de un sistema dinámico suave

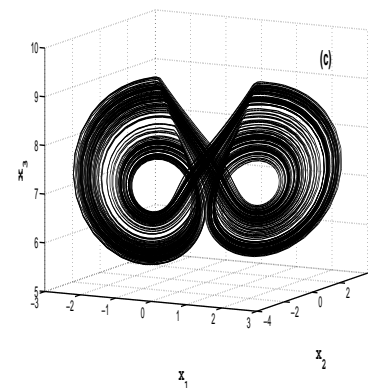
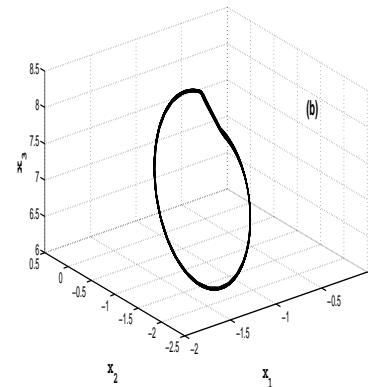
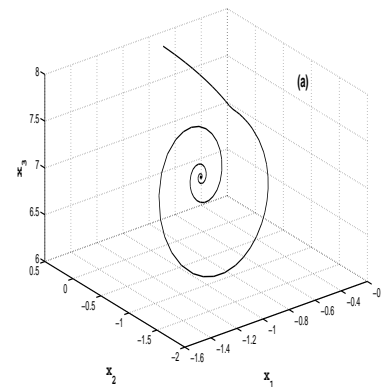


Figura 1. Trayectorias del sistema PWL Lorenz

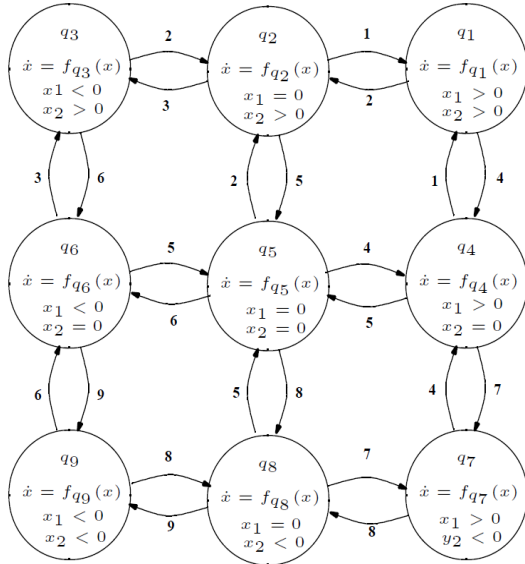


Figura 2. AH del sistema PWL Lorenz

se escogen de modo que sea posible obtener información sobre las características del sistema subyacente analizando solamente las cadenas de símbolos que proporcionan. El número de símbolos utilizados determina con cuánta cercanía se representa la dinámica suave del sistema mediante una *palabra* o cadena infinita de símbolos. Retornando al ejemplo de la medición de un voltaje, si cada uno de los 4096 diferentes signos son utilizados se tendrá un representación cercana a la dinámica del sistema original. Sin embargo, la dinámica de operación del sistema podría ser descrita con un número mucho menor de símbolos. Por ejemplo, considere que las mediciones de voltaje son las de un foco, aquí la evolución dinámica del sistemas puede ser representada con solo dos estados, encendido y apagado. Entonces, la secuencia de encendidos y apagados nos da la *dinámica simbólica* del sistema. El conjunto de todas las *palabras* que pueden ser generadas por este sistema definen un *lenguaje*, o conjunto de palabras permitidas del sistema, identificar que palabras pertenecen al lenguaje y cuales no, es una herramienta poderosa para la clasificación y estudio de sistemas (Hopcroft y Ullman, 1979).

Utilizar *dinámica simbólica* para analizar sistemas dinámicos continuos es una idea madura que tiene antecedentes en los trabajos de Hadamard, Morse, y Birkhoff, remontándose hasta 1898. Más recientemente, tomando como paradigma a seguir el modelar un sistema dinámico lo más “burdamente” posible, es decir, con el número menor de símbolos tal que las características importantes del comportamiento puedan ser capturadas. El análisis de *dinámica simbólica* se ha aplicado al estudio de sistemas caóticos. Por ejemplo, los comportamientos de mapeos cuadráticos caóticos fueron analizados a partir de secuencias de dos símbolos en (Hao y Zheng, 1998). Por otra parte, el sistema caótico de Lorenz fue analizado usando un mapeo

cúbico que permite la descripción de cinco símbolos para describir su comportamiento en (Hao et al., 1998).

En este trabajo nos enfocamos al análisis del sistema PWL Lorenz (Baghious y Jarry, 1993; Liu et al., 2004). Para este sistema el espacio de estados esta naturalmente dividido por las secciones lineales del sistema. De modo que, una forma directa de escoger los símbolos para describir su evolución dinámica es precisamente asignándolos a cada parte de su espacio de estados, como se describe en la Figura 1. Con el fin de identificar un conjunto de cadenas de símbolos que describen la dinámica del sistema PWL Lorenz proponemos representarlo como un AH (Alur et al., 1993).

El uso de AH en el estudio de sistemas discontinuos es una línea de investigación de interés actual (Navarro, 2009; Navarro, 2009a). En el contexto de AH, un sistema discontinuo se modela como un conjunto de localidades discretas del espacio de estados, cada una con su propia descripción dinámica. La evolución dinámica del sistema se describe como transiciones entre las diferentes localidades mediante un conjunto de reglas lógicas, las cuales se representan como un grafo, en el cual cada nodo corresponde a una localidad, mientras que las condiciones de transición entre localidades se especifican en las aristas (van der Schaft y Schumacher, 2000).

En esta contribución, un AH para el sistema PWL Lorenz se construye en términos de las diferentes partes lineales de su espacio de estados. Entonces, asignando un símbolo a cada localidad, se obtiene la dinámica del sistema PWL Lorenz descrita por una secuencia de símbolos que indican las localidades del AH que el sistema visita mientras evolucionan sus soluciones. Realizamos el análisis de la *dinámica simbólica* del PWL Lorenz para trayectorias correspondientes a comportamientos de punto equilibrio estable, ciclo limite estable y oscilaciones caóticas. Para cada tipo de trayectoria logramos identificar patrones de evolución característicos. Estos resultados permiten delimitar el conjunto de cadenas de símbolos, es decir, el lenguaje que caracteriza el comportamiento de este sistema caótico.

II. SISTEMA PWL LORENZ

El sistema PWL Lorenz esta descrito por (Liu et al, 2004):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x_2 - x_1) \\ \text{sgn}(x_1)(c - x_3) + dx_2 \\ \text{sgn}(x_2)x_1 - bx_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

en dónde $x = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ es la variable de estado; $\text{sgn}(\cdot)$ es la función signo estándar, que aquí se toma como: $\text{sgn}(\epsilon) = 1$ para $\epsilon > 0$, $\text{sgn}(\epsilon) = 0$ para $\epsilon = 0$, y $\text{sgn}(\epsilon) = -1$ para $\epsilon < 0$. Para los parámetros $a = 1.2$, $b = 0.15$, $c = 7 - a\alpha$, $d = (8\alpha - 1)0.1$, y con $\alpha = -1$ el sistema 1 tiene el comportamiento de un punto de equilibrio estable, Figura 1(a). Para $\alpha = -0.35$ el sistema evoluciona en un

ciclo límite estable, Figura 1(b). Finalmente, para $\alpha = 0$ el sistema PWL Lorenz produce un atractor caótico con estructura similar a la llamada “mariposa de Lorenz” como se muestra en Figura 1(c).

III. PWL LORENZ COMO AH

Un AH general con entradas y salidas se define por la colección

$$AH = (Q, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, E, \Sigma, O, Dom, \mathcal{F}, Init, G, R, h, r)$$

dónde (Navarro, 2009):

- $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ es un conjunto finito de localidades discretas.
- $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$ son los espacios continuous de los estados, entradas y salidas, respectivamente. Un punto en la trayectoria del AH es $(q, x) \in Q \times \mathcal{X}$.
- $E \subseteq Q \times Q$ es un conjunto finito de aristas llamadas transiciones o eventos.
- $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M\}$ es un conjunto finito de símbolos que conforman el alfabeto del AH, con estos se etiquetan las transiciones y representan los eventos discretos de entrada.
- $O = \{o_1, o_2, \dots, o_K\}$ es un conjunto finito de símbolos representando un evento discreto de salida.
- $Dom : Q \rightarrow 2^{\mathcal{X} \times \mathcal{U}}$ es el dominio de las localidades. Dom asigna un conjunto de estados y entradas a cada localidad discreta $q_i \in Q$, tal que, $Dom(q_i) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{U}$. Mientras la evolución del sistema se mantenga dentro de la localidad q_i , el estado continuo x debe satisfacer $x \in Dom(q_i)$.
- $\mathcal{F} = \{f_{q_i}(x, u) : q_i \in Q\}$ es el conjunto de campos vectoriales que describen la dinámica continua del sistema, tal que, $f_{q_i} : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$. Cada $f_{q_i}(x, \cdot)$ se asume Lipschitz en el dominio de la localidad q_i para asegurar que la solución dentro de $Dom(q_i)$ existe y es única.
- $Init \subseteq Q \times \mathcal{X}$ es un conjunto de condiciones iniciales.
- $G : E \rightarrow 2^{\mathcal{X}}$ es un conjunto de guardas. La función G asigna a cada transición $e = (q_i, q_j) \in E$ un conjunto de estados continuous ($G(e) \subset \mathcal{X}$). Cada guarda activa un cambio de localidad discreta.
- $R : E \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow 2^{\mathcal{X}}$ es un mapa de resets de los estados continuous para cada transición. Se asume que $\forall e \in E, G(e) \neq \emptyset$ y $\forall x \in G(e), R(e, x, u) \neq \emptyset$.
- $h : Q \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ es la función de salida continua, se considera que se tiene una para cada localidad.
- $r : Q \times \mathcal{X} \times \Sigma \times \mathcal{U} \rightarrow O$ es el mapa de salidas discretas, se asume que se tiene una para cada localidad.

Para representar el sistema PWL Lorenz como un AH se hacen las siguientes consideraciones: Primero, tomando en cuenta que la descripción del sistema PWL Lorenz tiene dos funciones sgn, que toman tres valores diferentes según el valor de su argumento. El espacio de estados del sistema (1) se divide en nueve partes correspondientes a los signos

de las variables x_1 y x_2 . Explícitamente, el sistema PWL Lorenz puede escribirse como:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, 9. \quad (2)$$

donde las nueve partes corresponden a los cuatro cuadrantes, cuatro semi-ejes y el origen del plano x_1 - x_2 . Esto es,

$$i = \begin{cases} 1, & \text{for } x_1 > 0 \text{ and } x_2 > 0 \\ 2, & \text{for } x_1 = 0 \text{ and } x_2 > 0 \\ 3, & \text{for } x_1 < 0 \text{ and } x_2 > 0 \\ 4, & \text{for } x_1 > 0 \text{ and } x_2 = 0 \\ 5, & \text{for } x_1 = 0 \text{ and } x_2 = 0 \\ 6, & \text{for } x_1 < 0 \text{ and } x_2 = 0 \\ 7, & \text{for } x_1 > 0 \text{ and } x_2 < 0 \\ 8, & \text{for } x_1 = 0 \text{ and } x_2 < 0 \\ 9, & \text{for } x_1 < 0 \text{ and } x_2 < 0 \end{cases} \quad (3)$$

con las correspondientes matrices A_i y B_i dadas por:

$$A_i = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & d & m_i \\ n_i & 0 & -b \end{pmatrix}, B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ p_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde $m_1 = m_4 = m_7 = n_7 = n_9 = -1$; $n_1 = n_3 = m_3 = m_6 = m_9 = 1$; $p_1 = p_4 = p_7 = c$; $p_3 = p_6 = p_9 = -c$; y $m_2 = m_5 = m_8 = n_2 = n_4 = n_5 = n_6 = n_8 = p_2 = p_5 = p_8 = 0$.

Cada una de las partes lineales del sistema PWL Lorenz se toman como localidades de su AH. Entonces, $Q = 1, 2, \dots, 9$. Para cada localidad el espacio de estados es un subconjunto de \mathbb{R}^3 ($\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^3$) y asumiremos que las localidades no tienen entradas (controles) continuous, y que las funciones de salida continuous son la identidad. Los dominios y campos vectoriales para cada localidad están dados por las ecuaciones (2) y (4). Por el lado discreto, el AH tiene como alfabeto los índices del sistema PWL Lorenz, es decir, $\Sigma = \{1, 2, \dots, 9\}$. Aquí también se considera que no se tienen entradas (controles) discretas, y se toman como salida discreta las localidades de llegada de las transiciones en cada evento, entonces $O = \{1, 2, \dots, 9\}$. El mapeo de resets se toma como la identidad, de modo que, en cada transición el estado x de inicio en la nueva localidad es el último valor de x en la localidad anterior. Para completar la descripción del sistema PWL Lorenz como AH, se establece el conjunto de eventos, que suceden cuando se cumplen las guardas descritas en (3). Note que los estados continuous x_1 y x_2 no pueden cambiar de signo sin cruzar por cero. De modo que, el conjunto de transiciones esta limitado a las transiciones que pasan por los semiejes. En resumen, el AH del sistema PWL Lorenz tiene nueve localidades discretas con su correspondiente descripción dinámica y una lógica de transiciones como se muestra en (3). La representación gráfica del AH para el sistema PWL Lorenz se muestra en la Figura 2. Cabe mencionar que los símbolos correspondientes a los semi-ejes y el origen, son visitados solo como cruces de la trayectoria del sistema y en cierto sentido podrían ser inferidos del orden de los otros

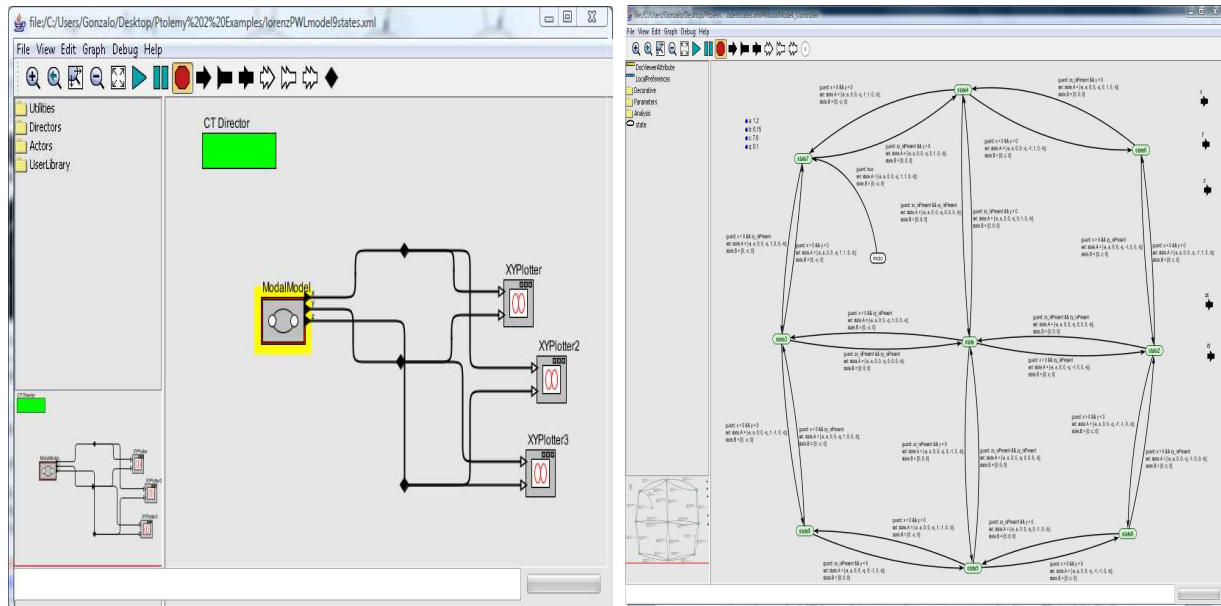


Figura 3. Realización en PtolemyII ©

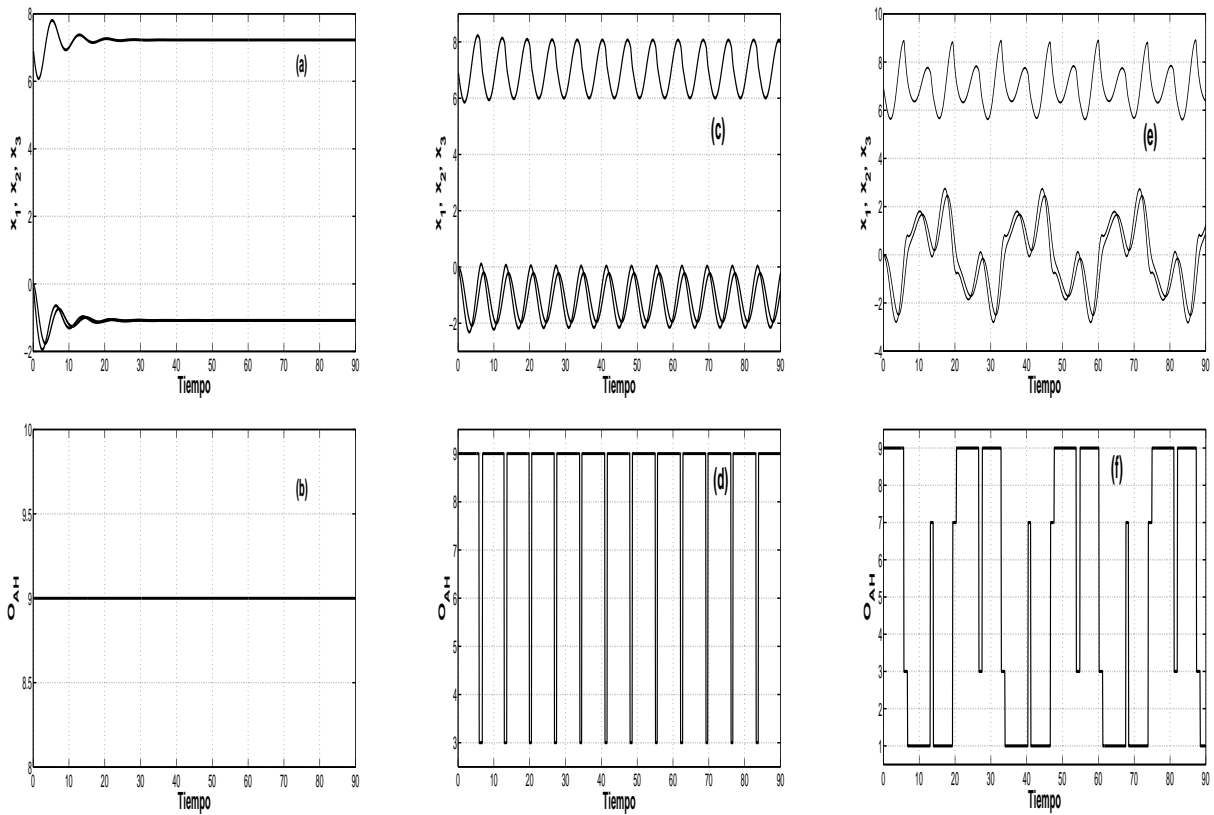


Figura 4. Trayectorias del AH para el sistema PWL Lorenz

símbolos. Sin embargo, en esta discusión se utilizan por completitud de la descripción del sistema mediante el AH.

IV. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

El AH descrito gráficamente en la Figura 2 se realizó en el programa de licencia libre Ptolemy II © (En la Figura 3 se presentan las pantallas de realización del AH para el sistema PWL Lorenz). El lector es referido a (Lee y Zheng, 2005) y (Lee, 2009) para obtener mayores detalles relativos a este programa de simulación.

Es importante recalcar que las trayectorias del AH consisten de dos partes: (1) La localidad en que se encuentra evolucionando el AH y (2) la dinámica continua de cada localidad. Las condiciones o guardas para decidir en que localidad se debe estar evolucionando el sistema se evalúan en cada instante, desde el punto de vista de las dinámicas continuas, las evaluaciones de las guardas y las transiciones de una localidad a otra son ideales e instantáneas. Nuestra simulación del AH tiene dos salidas, la salida continua corresponde a x_1 , x_2 , y x_3 , los estados continuos del sistema PWL Lorenz, por otro lado, el AH proporciona la salida discreta O_{AH} que indica las localidades donde la dinámica continua se esta evaluando.

En las Figuras 4(a) y 4(b), se muestran las trayectorias en el tiempo de los estados del sistema PWL Lorenz y la secuencia de símbolos de salida del AH, respectivamente, correspondientes al sistema PWL Lorenz cuando $\alpha = -1$. Para este valor, el sistema tiene un comportamiento de punto de equilibrio estable. Debido a que el punto de equilibrio del sistema es $x_1 = x_2 = -1.25$, $x_3 = 6.85$, el sistema evoluciona en una sola localidad del AH descrito en la Figura 2, la correspondiente a $(x_1 < 0, x_2 < 0)$ codificada con el símbolo de salida $O_{AH} = 9$. Entonces, las cadenas de símbolos que forman el lenguaje para este comportamiento son de la forma: $9, 9, \dots, 9 = 9^\infty$.

Enseguida se simulo el AH del sistema PWL Lorenz cuando $\alpha = -0.35$. Las trayectorias de los estados continuos y la secuencia de símbolos de salida del AH se dibujan en las Figuras 4(c) y 4(d), respectivamente. Para este valor del parámetro α , el sistema tiene un comportamiento periódico estable que describe un ciclo límite contenido en los cuadrantes $x_1 < 0, x_2 < 0$ y $x_1 > 0, x_2 < 0$. Conforme la trayectoria evoluciona pasa de un cuadrante a otro a través del semieje $x_1 < 0, x_2 = 0$. El paso por el semiejes es muy rápido, corresponde a un cruce por cero, es decir, la trayectoria toca el eje e inmediatamente se mueve fuera de él, por lo tanto estas transiciones son detectadas pero son consideradas ideales y no cambian la trayectoria de los estados continuos. Sin embargo, son eventos que pueden ser utilizados para la realización de estrategias de control supervisor en inclusive en algoritmos de control por modos deslizantes (Navarro, 2009; Navarro, 2009a). Teniendo esto en cuenta, las localidades visitadas se codifican con los símbolos $O_{AH} = \{3, 9\}$. Entonces, las palabras que forman el lenguaje para este comportamiento son de la forma: $\dots, 3, \dots, 3, 9, \dots, 9, 3, \dots, 9, \dots$, es decir, cadenas infinitas con

solo dos símbolos y con un número de repeticiones fijo para cada símbolo.

Por último simulamos el AH para $\alpha = 0$. Para esta α el sistemas PWL Lorenz esta en su regimen caótico. Los estados del sistema y la salida simbólica del AH se presentan en las Figuras 4(e) y 4(f), respectivamente. El atractor caótico del sistema PWL Lorenz visita los cuatro cuadrantes del plano x_1-x_2 y cruza los cuatro semi-ejes. La naturaleza del comportamiento dinámico del sistema es tal que los pasos por los semiejes son instantáneos, es decir, la dinámica cruza y no se desliza por las discontinuidades correspondientes a los semiejes. Esto es, que en cada pareja de transiciones $1 \leftrightarrow 7$, $7 \leftrightarrow 9$, $9 \leftrightarrow 3$, y $3 \leftrightarrow 1$; hay un 4, 8, 6 y 2, respectivamente. Teniendo esta situación en cuenta, los símbolos que codifican las localidades visitadas por el sistema en regimen caótico son $O_{AH} = \{1, 3, 7, 9\}$. Las palabras que describe el comportamiento caótico del sistema PWL Lorenz siempre son secuencias de símbolos de la forma: $1, 7, 9, 3, 1$ con repeticiones que comienzan de manera aleatoria con un desplazamiento de un símbolo hacia adelante o hacia atrás en cualquiera de estos símbolos. Esta secuencia de símbolos corresponde a moverse por los cuadrantes de la Figura 2 en sentido de las manecillas del reloj, con los desplazamientos correspondiendo a regresar o adelantar un cuadrante, lo que ocurren de forma no repetitiva dando al sistema su característica caótica. Entonces, las palabras que forman el lenguaje del atractor caótico del sistema PWL Lorenz se conforma de secuencias con la cadena de símbolos $\dots, 1, 7, 9, 3, 1, 7, \dots$ y todos sus desplazamientos de un solo símbolo en cada posición.

V. CONCLUSIONES

El estudio de la *dinámica simbólica* del sistema PWL Lorenz a partir de su representación como AH muestra las potenciales ventajas de este enfoque en el análisis de sistemas caóticos. Siendo quizás su principal ventaja que nos permite caracterizar la dinámica caótica como una cadena de símbolos permutados. En particular, para este sistema, el análisis de la *dinámica simbólica* se facilita considerablemente utilizando el contexto de AH. Ya que una representación como AH se obtiene directamente de la estructura lineal del sistema y como esta divide el espacio de estados.

Como se muestra en esta contribución el análisis de las secuencias de símbolos correspondientes a diferentes comportamientos permite establecer una descripción del lenguaje correspondiente. En este sentido, el análisis presentado puede ampliarse considerando diferentes sistemas caóticos, de esta manera una clasificación general de sistemas caóticos puede ser propuesta en términos de los lenguajes correspondientes a sus atractores caóticos.

Estamos convencidos que muchos aspectos del análisis, diseño y simulación de sistemas caóticos pueden beneficiarse de la utilización del contexto de AH. En particular, mediante esta interpretación es posible proponer realizaciones de esquemas de control supervisor, en el que se impone



un comportamiento mediante el control de las transiciones entre localidades discretas, ya sea incluyendo entradas discretas en la descripción del AH, o inclusive definiendo asignaciones en las funciones de reset para cada evento. Actualmente estamos investigando diferentes métodos de control basados en la descripción de AH, estos trabajos serán reportados en futuras comunicaciones.

VI. AGRADECIMIENTOS

Se contó con financiamiento de CONACYT con los proyectos CB-2008 106915-Y y FOMIX-SLP 86513.

REFERENCIAS

- B.-L., Hao (1989). *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems*. World Scientific. Singapore.
- J. E. Hopcroft, J. D. Ullman (1979). *Introduction to automata theory, languages and computation* Addison Wesley. Reading
- B.-L., Hao, W.-M., Zheng (1998). *Applied symbolic dynamics and chaos*. World Scientific. Singapore.
- B.-L., Hao, J.-X. Liu, W.-M., Zheng (1998). Symbolic dynamics analysis of the Lorenz equations *Phys Rev E* **57**(5), 5378-5396.
- E. H. Baghious, P. Jarry (1993). Lorenz attractor from differential equations with piecewise linear terms. *Int. J. Bifurcation and Chaos* **3**(1), 201-210.
- J. Liu, J. Lu, X. Wu (2004). Bridge the gap between the PWL Lorenz and PWL Che's systems. *8th Int. Conf. on Control Automation Robotics and Vision*, Kuming China, Diciembre 6-9, 2004, 1368-1373.
- R. Alur, C. Courcoubetis, T. A. Henzinger, P. H. Ho (1993). hybrid automata: An algorithmic approach to the specification and verification of hybrid systems. *Lecture Notes in computer Science*, **736**, 209-229.
- A. J. van der Schaft, J. M. Schumacher (2000). *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems* Springer. London.
- E. M. Navarro-López, (2009). Hybrid Modelling of a Discontinuous Dynamical System Including Switching Control. *Second IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems*, London, UK, 1-6.
- E. M. Navarro-López, (2009). Hybrid-automaton Models for Simulating Systems with Sliding Motion: Still a Challenge. *Third IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, Zaragoza, España, 322-327.
- E. A. Lee, H. Zheng (2005). Operational Semantics of Hybrid Systems, in *Proc. of Hybrid Systems: Computation and Control*, **LNCS, 3414**, 25-53.
- E. A. Lee (2009). *Finite State Machines and Modal Models in Ptolemy II*, Technical Report UCB/EECS-2009-151, University of California at Berkeley, November, 2009.